Тәжірибелік сабақ

Тақырып №10. Күрделі функция туындысы. Кері функцияның туындысы. Логарифмдік диференциалдау.

1. $y=\ln\ln^2\ln^3 x$ функциясының туындысын табыңыз.

Шешуі. Күрделі функциядан туынды алу ережесін қолданбас бұрын логарифмдік функцияның қасиеті арқылы ықшамдап алу керек.

$$y=\ln\ln^2\ln^3 x=\ln\left(\ln\ln^3 x\right)^2=2\ln\ln\ln^3 x=2\ln 3\ln\ln x=2(\ln 3+\ln\ln\ln x)$$

Енді y' туындысын анықтаймыз:

$$y'=(2(\ln 3+\ln\ln\ln x))'=2\left((\ln 3)'+(\ln\ln\ln x)'\right)=2\left(0+\frac{1}{\ln\ln x\cdot\ln x\cdot x}\right)=$$

$$=\frac{2}{\ln\ln x\cdot\ln x\cdot x}.$$

Жауабы: $y'=\dfrac{2}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)}$

2. $y=tg\sqrt{\cos\frac{1}{3}}+\dfrac{\sin^2 31x}{31\cos 62x}$ функциясының туындысын табыңыз.

Шешуі. Алдымен 2-ші қосылғышты түрлендіріп алу қажет.

$$\frac{\sin^2 31x}{31\cos 62x}=\frac{\frac{1}{2}(1-\cos 62x)}{31\cos 62x}=\frac{1-\cos 62x}{62\cos 62x}=\frac{1}{62}\left(\frac{1}{\cos 62x}-1\right)$$

$$y'=(tg\sqrt{\cos\frac{1}{3}}+\frac{1}{62}\left(\frac{1}{\cos 62x}-1\right))'=0+\frac{1}{62}\left(-\frac{1}{\cos^2 62x}(-\sin 62x)62+0\right)$$

$$=\frac{1}{62}\frac{\sin 62x}{\cos^2 62x}62=\frac{\sin 62x}{\frac{1}{2}(1+\cos 124x)}=\frac{2\sin 62x}{1+\cos 124x}$$

Жауабы: $y'=\dfrac{2\sin 62x}{1+\cos 124x}$

3. $y=arctg\dfrac{tg\frac{x}{2}+1}{2}$ функцияның туныдысын табыңыз.

Шешуі.

$$y'=(arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{2})'=\frac{1}{1+\left(\frac{tg\frac{x}{2}+1}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{tg\frac{x}{2}+1}{2}\right)'=\frac{1}{1+\frac{\left(tg\frac{x}{2}+1\right)^2}{4}}\cdot\frac{1}{2}\cdot$$

$$\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{4+\left(tg\frac{x}{2}+1\right)^2}\cdot\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}+\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}+1+\sin x}=$$

$$=\frac{1}{2(1+\cos x)+1+\sin x}=\frac{1}{\sin x+2\cos x+3}$$

Жауабы: $y'=\dfrac{1}{\sin x+2\cos x+3}$

4. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ функциясының туындысын табыңыз.

Шешуі. $y'=\left(\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'+\dfrac{1}{2}\left(\ln(1-x)-\ln(1+x)\right)'=$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}*\sqrt{1-x^2}-\arcsin x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)=$$

$$=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x}{(1-x^2)}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)=\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x+1-x}{1-x^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}-\frac{2}{2(1-x^2)}=\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x-\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Жауабы: $y'=\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

5.Келесі есептерді өз беттеріңмен шығарыңдар

1. Келесі функциялардың туындыларын тап:

а) $y=x\sin^3 3x$; б) $y=\sqrt{\dfrac{\cos^2 x+1}{\sin 2x+1}}$;

в) $y=\left(2^{\cos 3x}+\sin 3x\right)^3$; г) $y=x\cos^2 x\cdot \ell^{x^2}$.

д) $y=x^3e^{tg3x}$; е) $y=\left(\sin^3 x+\cos^3 2x\right)^2$;

ж) $y=\ln\left(x^4-\sin^3 x\right)$; з) $y=x\sin 7x\cdot tg^2 x$.

и) $y=xctg^2 5x$; к) $y=\left(x^3+tg^3 2x\right)^2$;

л) $y=\sin\left(x^5-tg^2 x\right)$; м) $y=x^3\cos 2x\cdot e^{-x^2}$.

2. Айқын емес y функциясының туындысын тап:

а) $e^{xy} - x^3 - y^3 = 3$; б) $xy - arctg\,\dfrac{x}{y} = 3$; в) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = a$.

(Ответ: а) $y' = \left(3x^2 - \ell^{xy} y\right)/\left(-3y^2 + \ell^{xy} x\right)$; б) $y' = -\left(x^2 y + y^3 - y\right)/\left(x^3 + xy^2 + x\right)$; в) $y = -\sqrt[3]{\left(y/x\right)^2}$.)

3. $x^4 - xy + y^4 - 1 = 0$ теңдеуімен берілген $M(0{,}1)$ нүктесіндегі y функциясының екінші туындысының мәнін тап. (Жауабы: -1/16.)